

Montceau-les Mines – 5 février 2020

A propos de la construction du nombre à l'école maternelle

Marie-Line Gardes

Marie-line.gardes@univ-lyon1.fr

Centre de Recherche en Neurosciences de Lyon

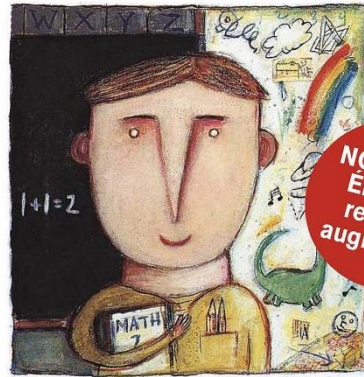
Université de Lyon, CNRS, Inserm



Points de vue croisés sur le nombre

STANISLAS DEHAENE

LA BOSSE DES MATHS



« LA BOSSE DES MATHS »
15 ANS APRÈS



L'ACQUISITION DU NOMBRE

Michel Fayol

puf



Chiffre ou nombre ?

Chiffre = **signe graphique** qui sert à représenter les nombres.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nombre = **concept mathématique** qui peut être représenté de plusieurs façons

cinq ; five ; 5 ; V ; 101

Numéro = évoque une écriture chiffrée qui ne renvoie pas directement au nombre



Du côté des neurosciences

Quels apports pour la construction du nombre ?

Une question...



quarante dixièmes



4,0

Quatre
[Katre]

4

dizaines	unités
	4

88
—
22

Le nombre qui multiplié par 5 donne 20



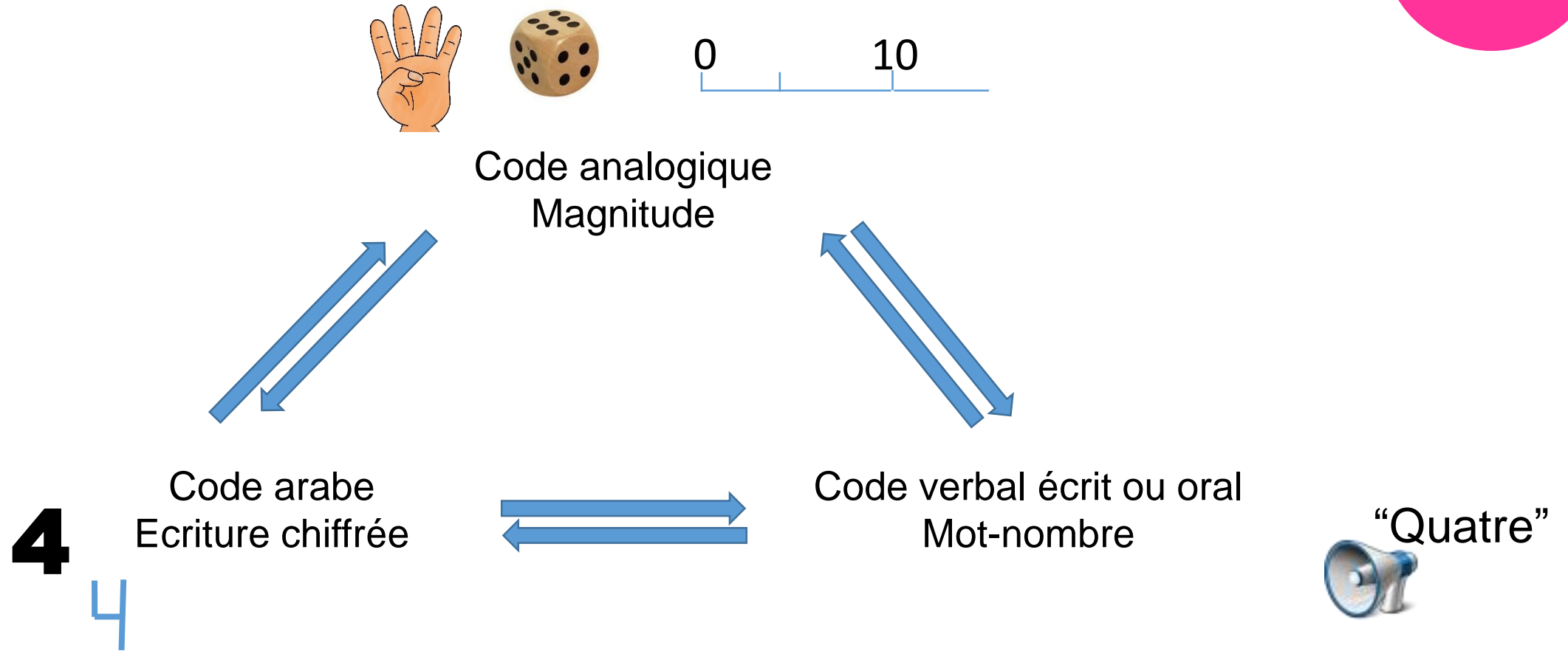
$\sqrt{16}$

4

Quatre virgule zéro



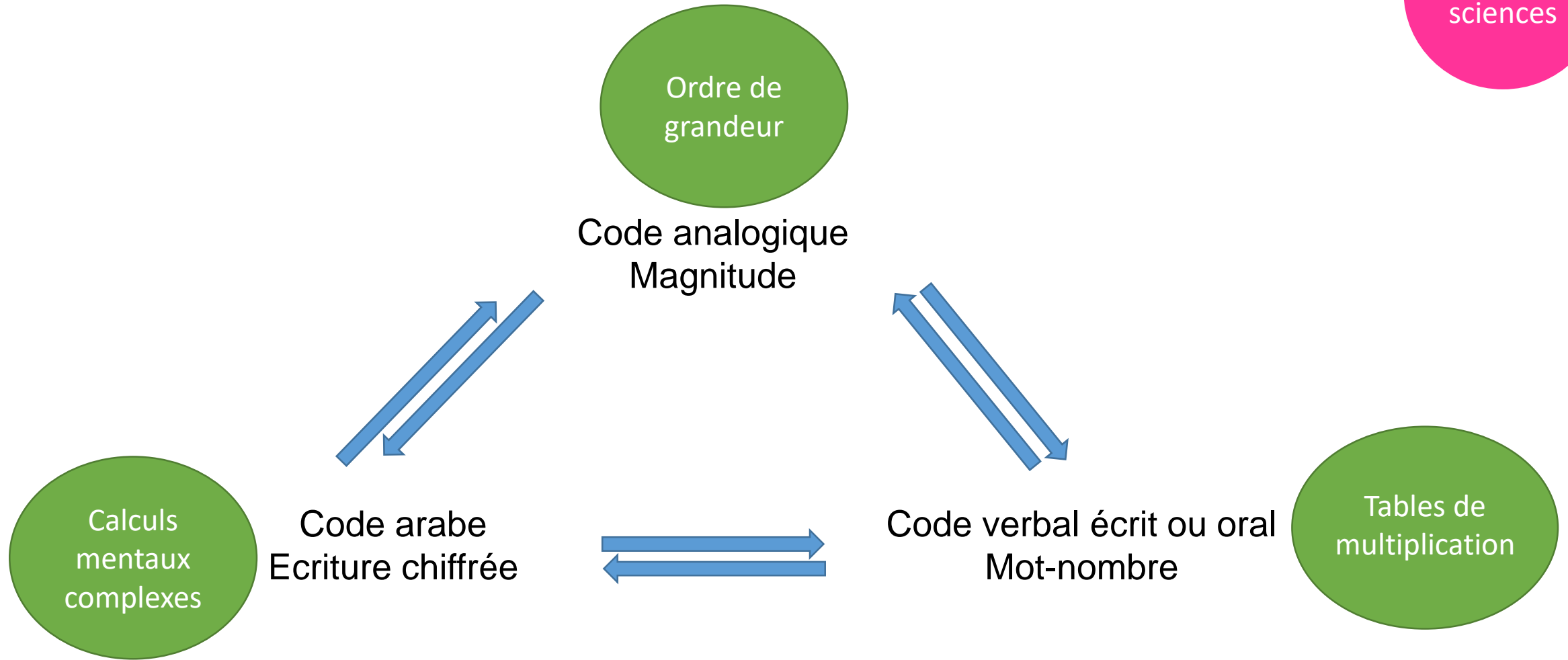
Le triple code



Le triple code de Dehaene (1992)

Le triple code

Neuro sciences



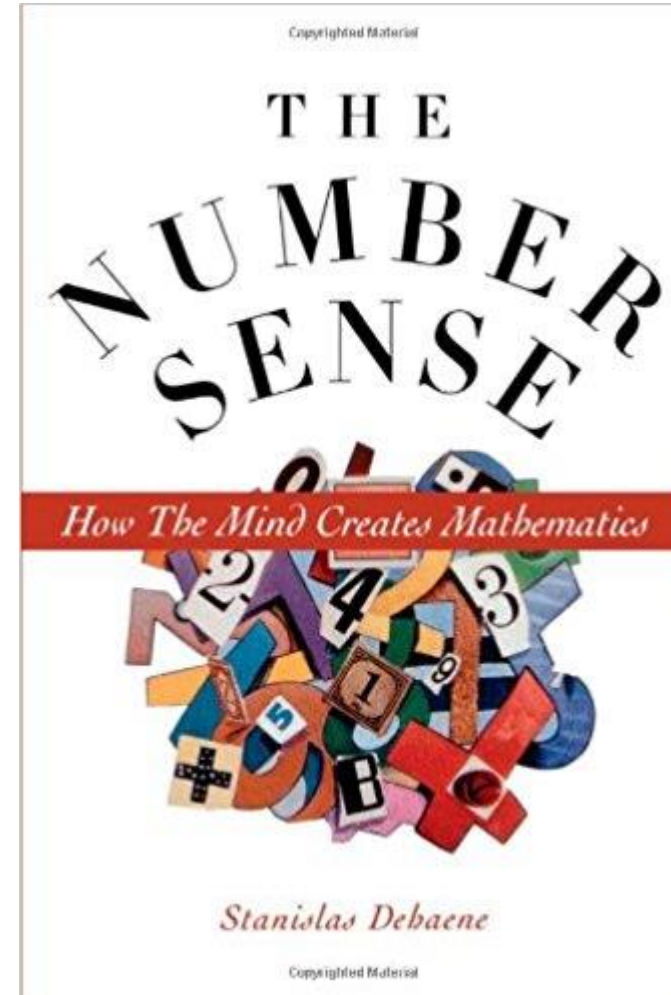
Le triple code de Dehaene (1992)

Le sens du nombre

Un **sens du nombre** est présent chez le nourrisson et repose sur des circuits cérébraux spécifiques que l'on retrouve chez d'autres primates. Il permet une rapide évaluation du nombre d'objets présents dans des ensembles, leur comparaison, et leur combinaison par des opérations d'addition et de soustraction. Son fonctionnement répond à trois traits caractéristiques de l'intuition : rapidité, automaticité, et inaccessibilité à l'introspection consciente.

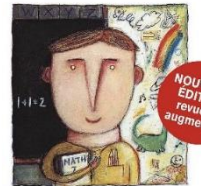
[Dehaene, 2008]

Neuro
sciences



STANISLAS DEHAENE

**LA BOSSE
DES MATHS**



« LA BOSSE DES MATHS »
15 ANS APRÈS

Odile
Jacob

Un petit test



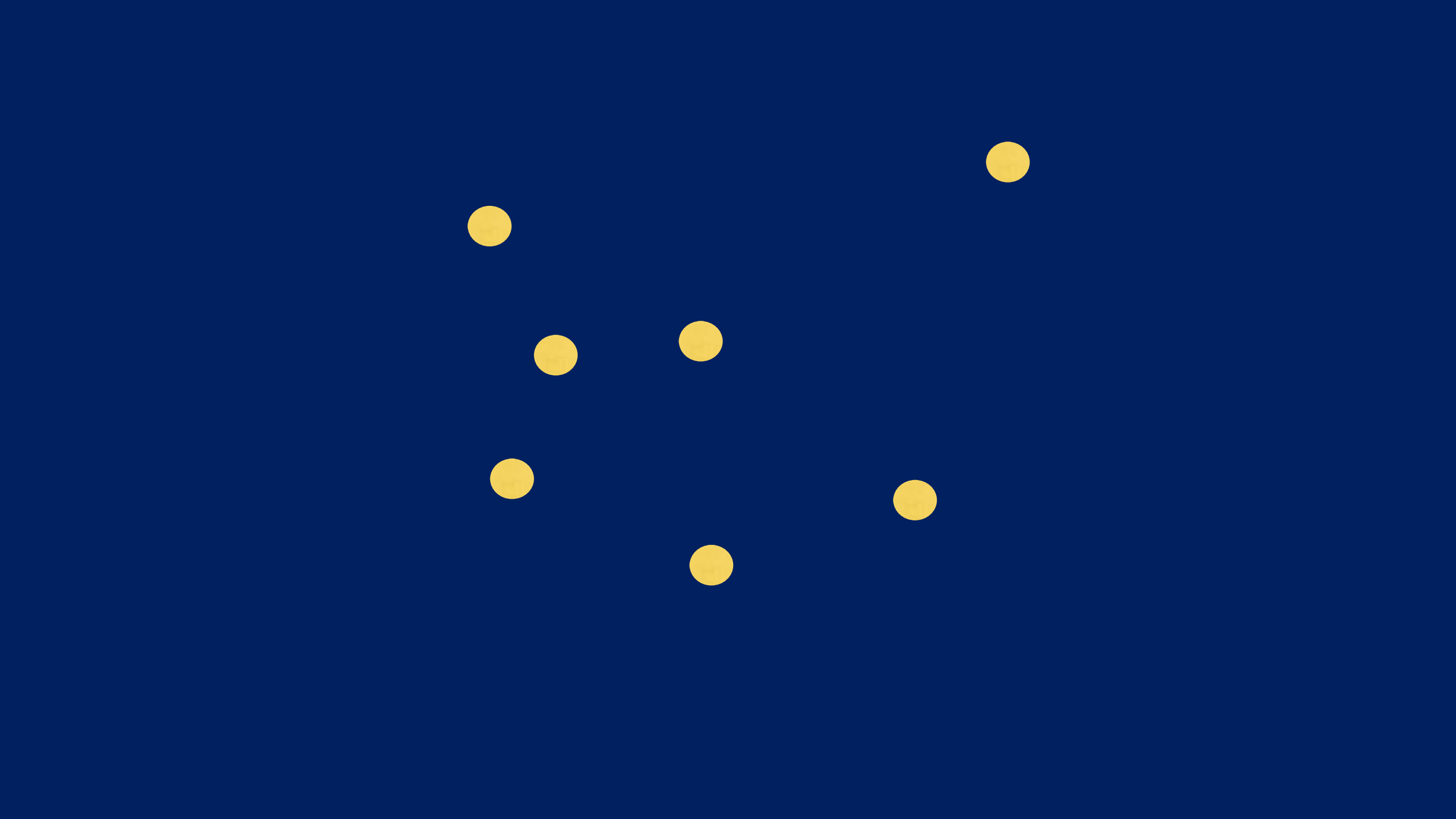


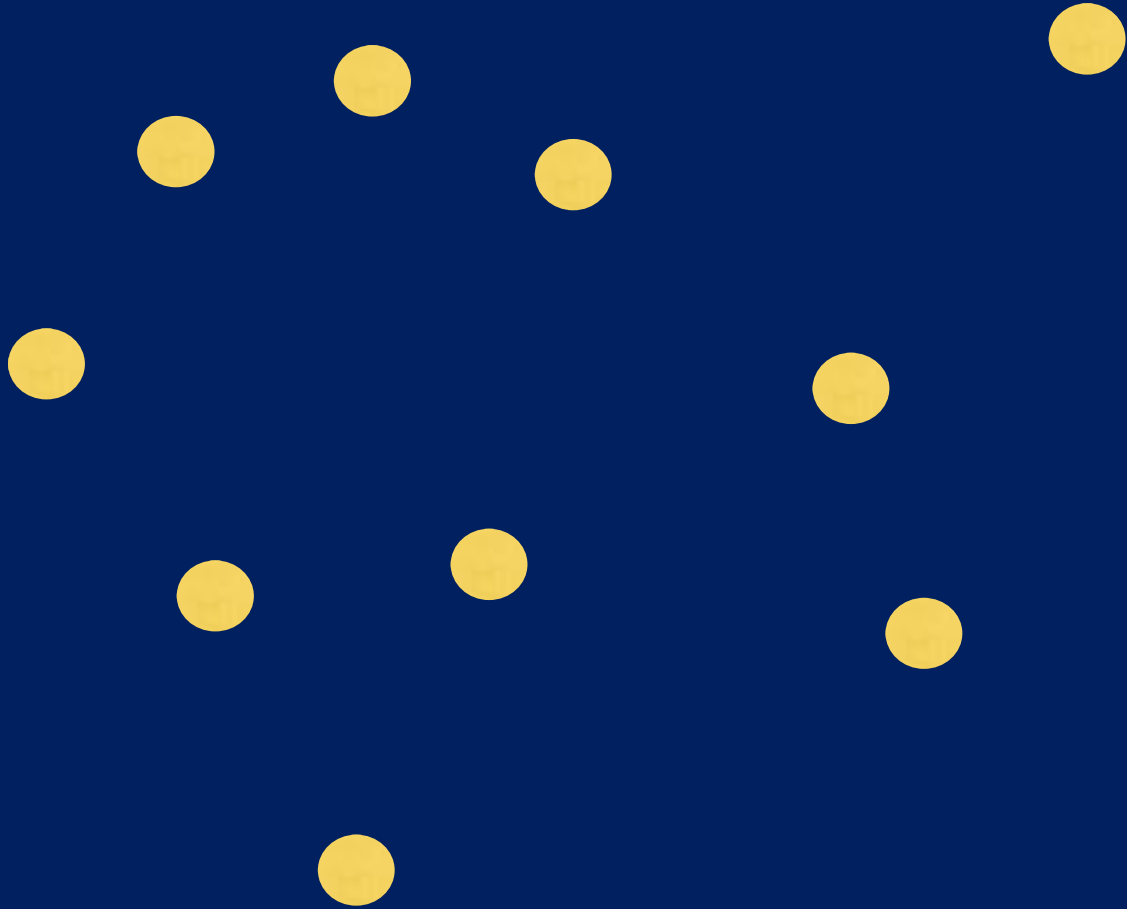


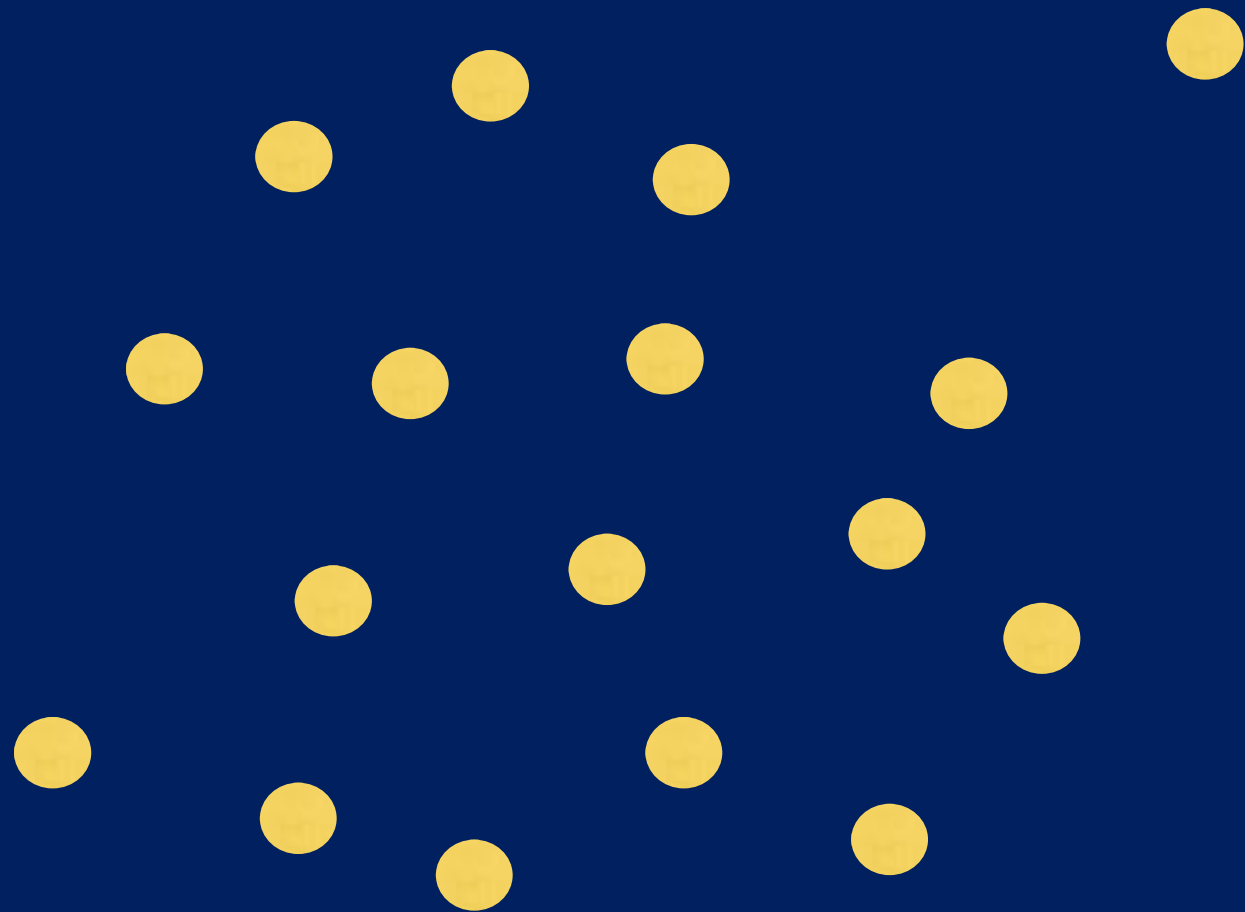












Le sens du nombre

Neuro
sciences

Subitizing

Processus qui permet de déterminer très rapidement et avec exactitude la quantité de petites collections d'éléments ($\rightarrow 4$).

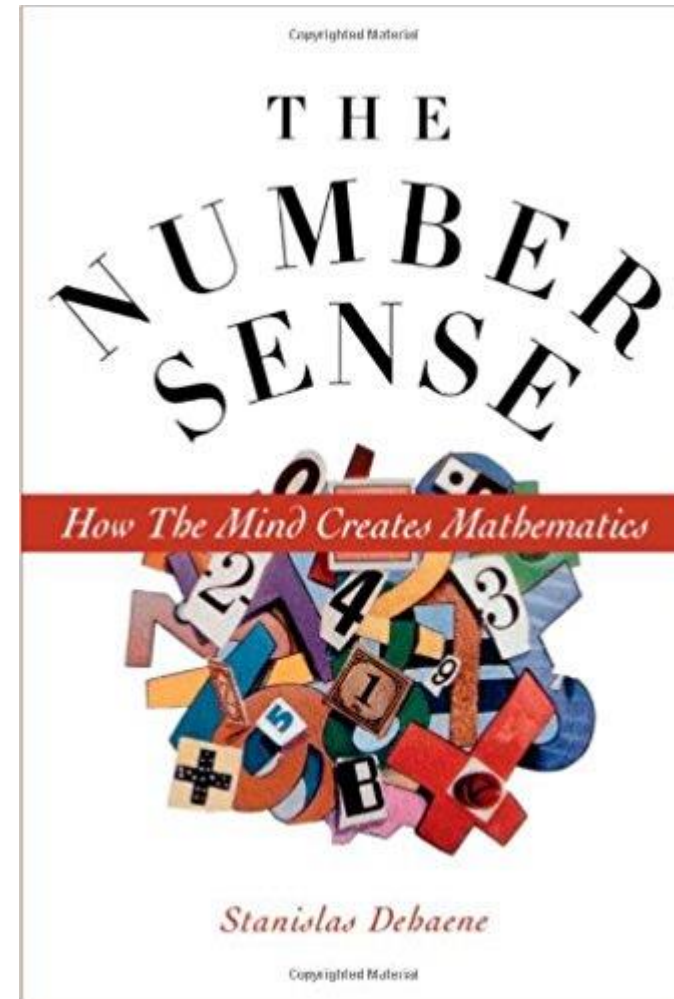


Perception très rapide,
immédiate et automatique

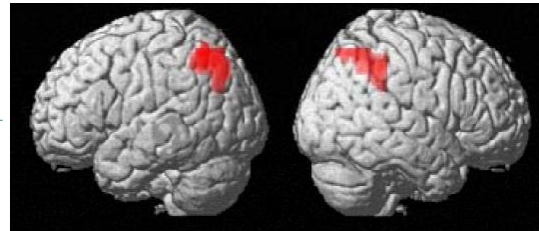
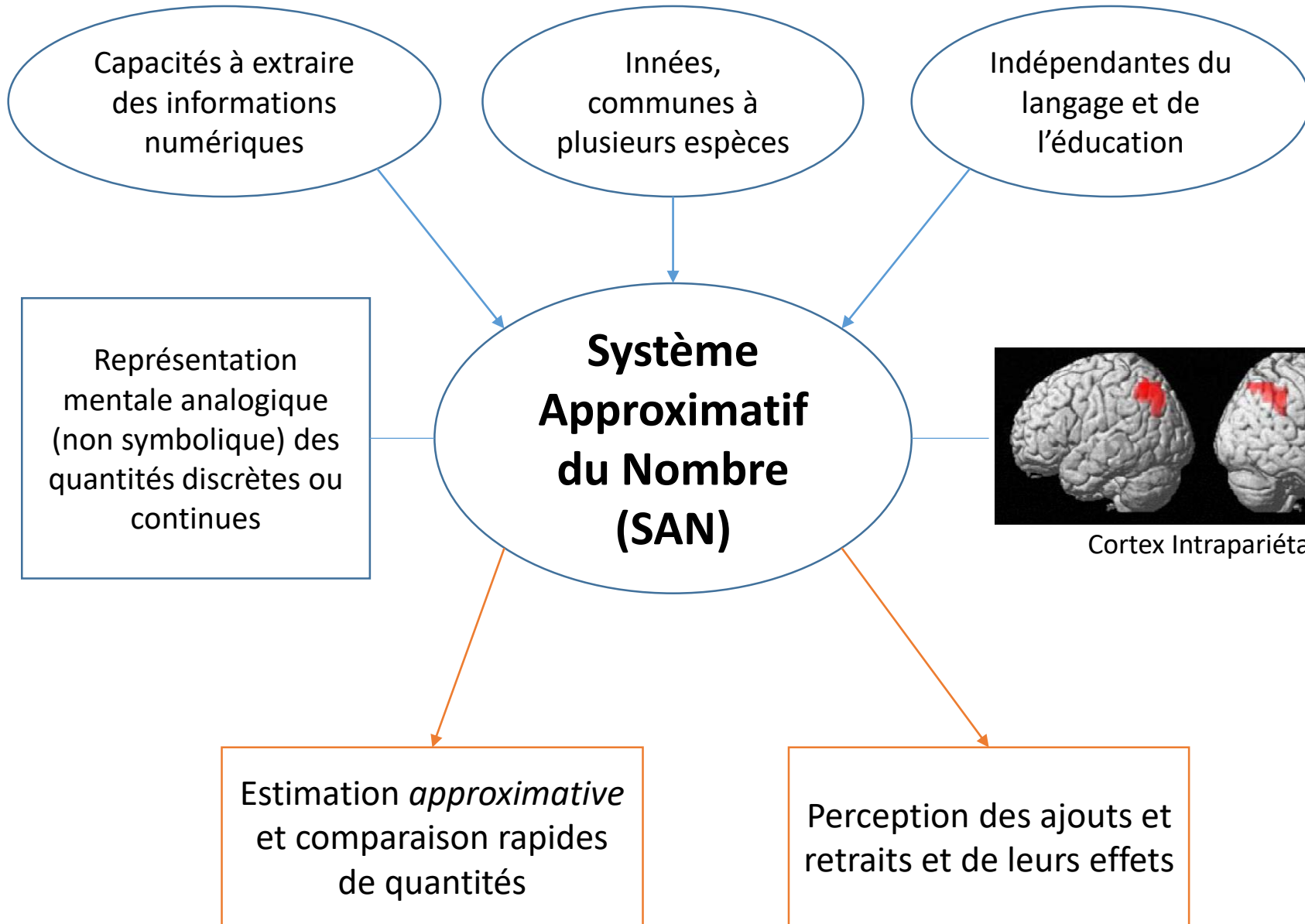


Système Approximatif du Nombre (SAN)

Processus qui permet d'évaluer
approximativement la quantités de
collections d'éléments (> 4)



Le sens du nombre

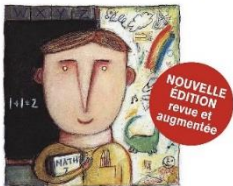


Cortex Intrapariétal



STANISLAS DEHAENE

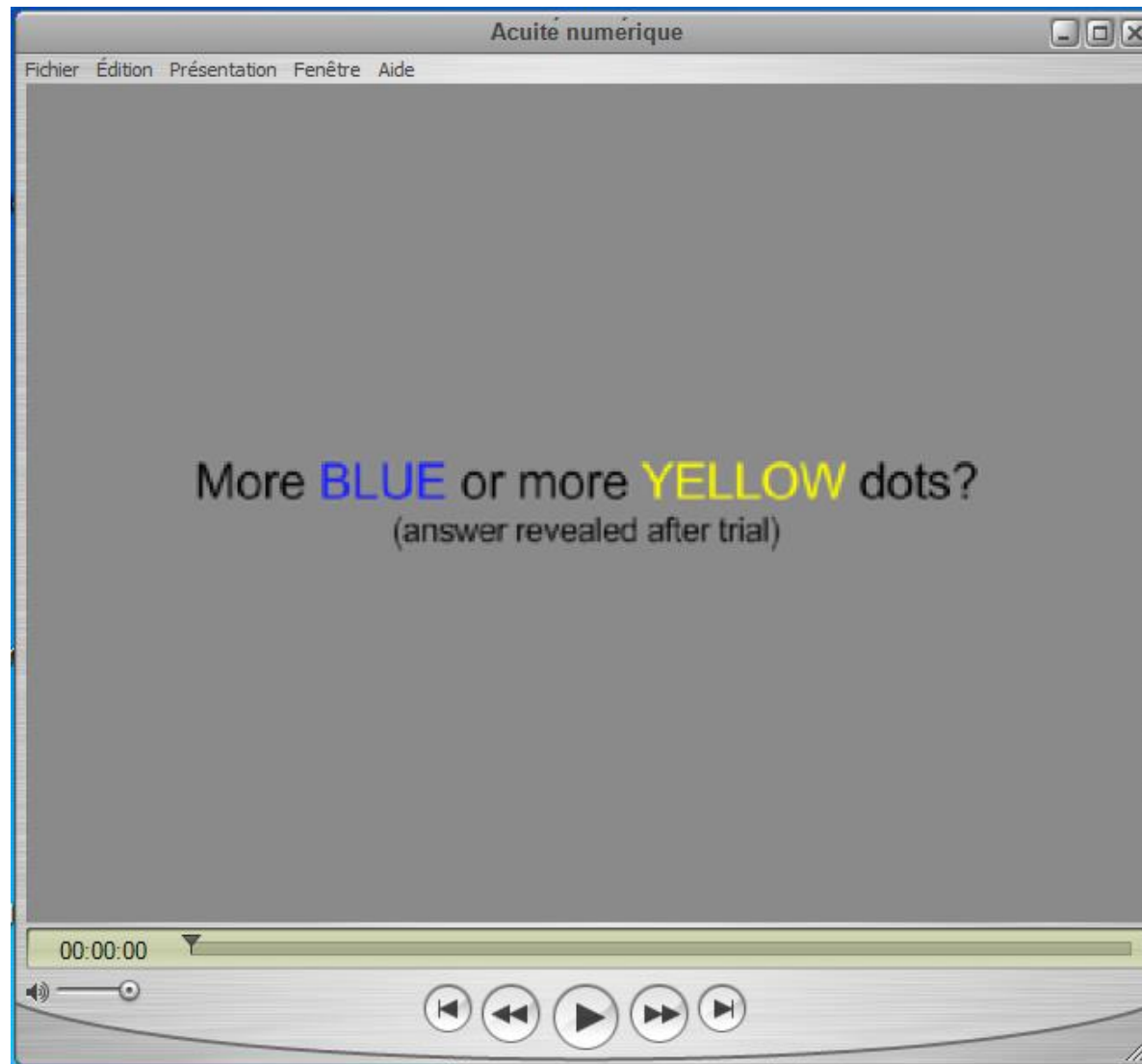
LA BOSSE DES MATHS



« LA BOSSE DES MATHS »
15 ANS APRÈS

Odile Jacob

Un petit test



Le sens du nombre

Système Approximatif du Nombre (SAN)

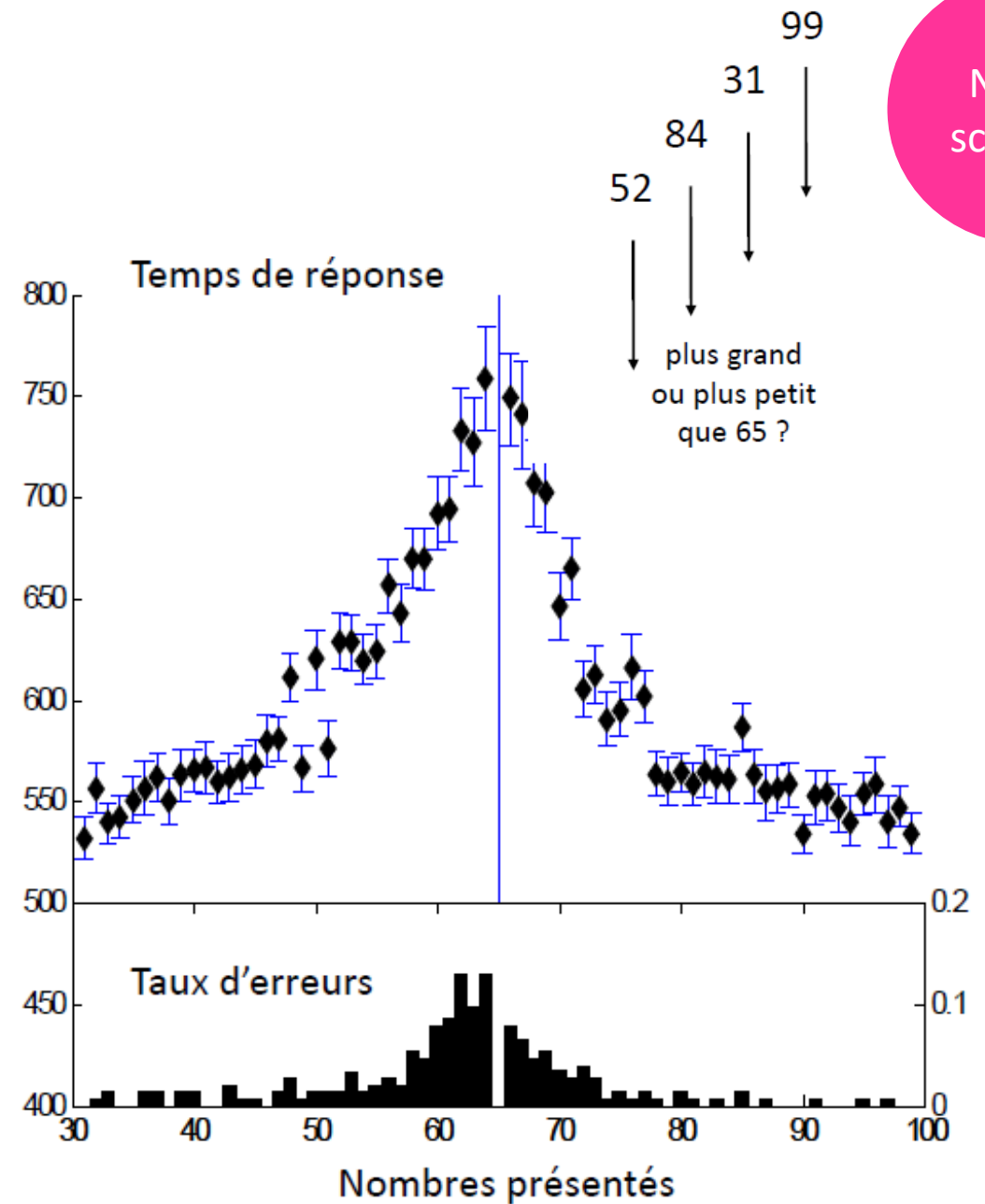


Effet de distance

La comparaison de deux quantités est d'autant plus facile qu'elles sont éloignées (40 et 65) et d'autant plus difficile qu'elles sont proches (63 et 65)

Effet de taille

La comparaison entre 125 et 126 est plus difficile que celle de 25 et 26.



Neuro sciences

Le sens du nombre

Neuro
sciences

Acuité numérique :

Précision avec laquelle on peut extraire l'information numérique

Augmente avec l'âge et l'éducation
[Piazza, 2010]

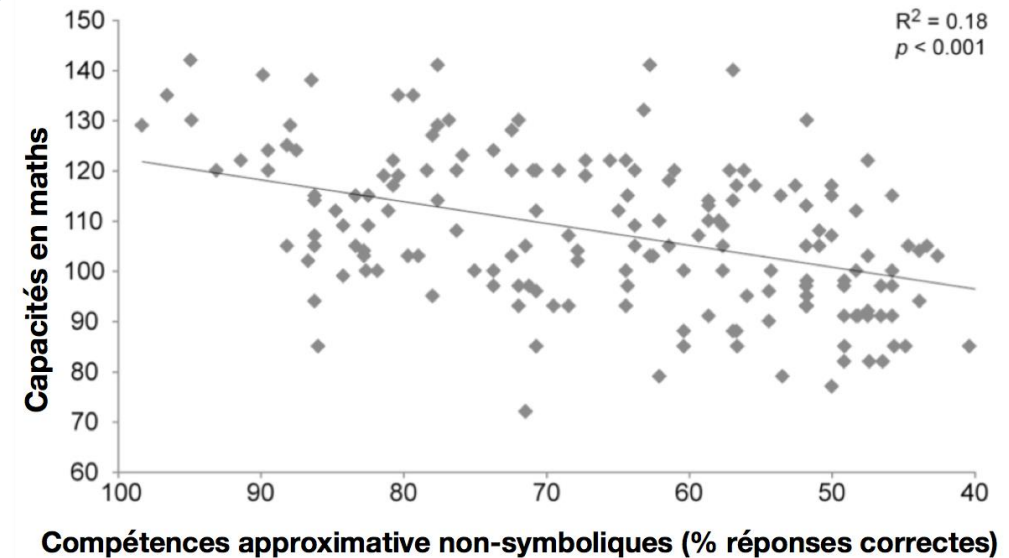
Systeme Approximatif du Nombre (SAN)

Linéarisation de la ligne
mentale numérique

[Siegler & Booth, 2004]

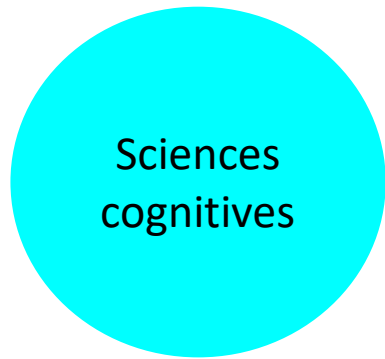
Corrélation avec la
performance en calcul

[Libertus & Brannon, 2010]



Conclusion sur les recherches en cognition numérique

- Il existerait un système neurocognitif préexistant (SAN) qui permet d'extraire et manipuler mentalement l'information numérique approximative de l'environnement sensoriel.
- L'apprentissage des nombres et du calcul se construirait à partir de ce SAN...mais évolution des recherches...
- **Importance de l'apprentissage**, de la construction du nombre.
- Ce processus d'apprentissage peut être aidé par l'utilisation des supports de visualisation spatiale des nombres.



Du côté des sciences cognitives

Processus cognitifs et difficultés

3 moments-clés :

- La conception des nombres
- La désignation des nombres
- L'utilisation d'opérations arithmétiques sur les nombres pour résoudre des problèmes

Difficultés

- Acquisition de la suite verbale des nombres
- Sa mise en relation avec les quantités
- Procédures de dénombrement

3 processus cognitifs distincts de dénombrement :

- Subitizing (petites quantités),
- Estimation (grandes quantités),
- Comptage (principes de Gelman et Gallistel - énumération)

- Difficultés du système décimal dues non-transparence de la base dix en dénomination
- Des **activités cognitives** impliquées dans le calcul mental et dans le calcul posé pas de même nature



Sciences
cognitives

Difficulté 1

Acquisition de la suite verbale des nombres

Des mots qui représentent :

Les unités : *un, deux,, neuf*

Les groupements de dix : *vingt, trente....*

Les puissances de dix : *cent, mille, million....*

Deux relations de base

Une relation additive

vingt-deux c'est vingt plus deux

Une relation multiplicative

quatre mille c'est quatre fois mille

Suivant la position des mots la relation est additive ou multiplicative

Et des exceptions...

✓ **une partie stable et conventionnelle**
(qui s'accroît à partir de 4 ans)

Un deux trois quatre ..

✓ **une partie stable et non conventionnelle**

Sept huit douze...

Ou

dix neuf, dix dix, dix onze

✓ **une partie instable et non conventionnelle**

La suite des mots nombres

Niveau d'élaboration et procédure

Principes de K. Fuson (1986)

- Le **chapelet** (**un-deux-trois-quatre**) : pas de signification arithmétique de la suite, mais le mot-nombre peut être associé à une configuration.
- La **chaîne insécable** (**un-deux-trois-quatre**) : pas de possibilité de commencer à un mot-nombre donné, mais possibilité de dénombrer en comptant, dans l'ordre appris et à partir de 1. Cette phase est acquise vers 4 ans.
- La **chaîne sécable** : compter à partir de x et jusqu'à y , signification arithmétique. Certaines procédures comme celle du surcomptage ne peuvent être mises en œuvre qu'à ce stade d'apprentissage. Cette phase est atteinte autour de 6 ans.
- La **chaîne terminale** : début d'automatisation, on peut compter n nombres à partir de x dans les deux sens.

La suite des mots nombres

Des situations

- Dès la PS, apprentissage de la comptine comme l'alphabet
- Situations indépendantes du comptage
- Importance des gestes associés à la comptine

PS

En rituel, jusqu'à cinq
ou six (stable et
conventionnelle),
importances des gestes

MS

En rituel, jusqu'à douze
ou quinze, jusqu'à un
nombre donné, à
rebours

GS

En rituel, jusqu'à
trente, en rythme, avec
arrêt prévu,
commencer à n, à
rebours, etc.

Difficulté 1

Acquisition de la suite verbale des nombres

Numération écrite chiffrée

Des symboles (les chiffres) qui représentent les unités : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Un symbole qui montre l'absence d'unité : 0

Un système de position :

234 indique 2 centaines, 3 dizaines, 4 unités

Régularité

Lien entre les 2
numérations

















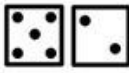
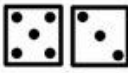
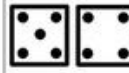
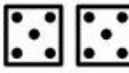
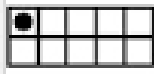
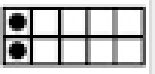
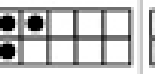
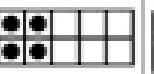

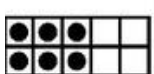
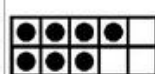
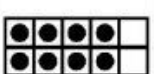
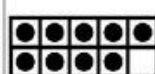

« trois mille quatre cent neuf »

30004009

349

Difficulté 2

Mise en relation de ces codes avec les quantités

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
									
									
									

Difficulté 2

Mise en relation de ces codes avec les quantités

CODE → QUANTITE

Comprendre que le nom du nombre évoque le cardinal

L'oral est premier.

Pas urgence à enseigner les écritures chiffrées.

Le risque est d'associer au mot « trois » uniquement le symbole « 3 », donc de « boucler sur deux signifiants » sans rapport avec le signifié.

Très tôt, l'enfant distingue les petites quantités :



Subitizing

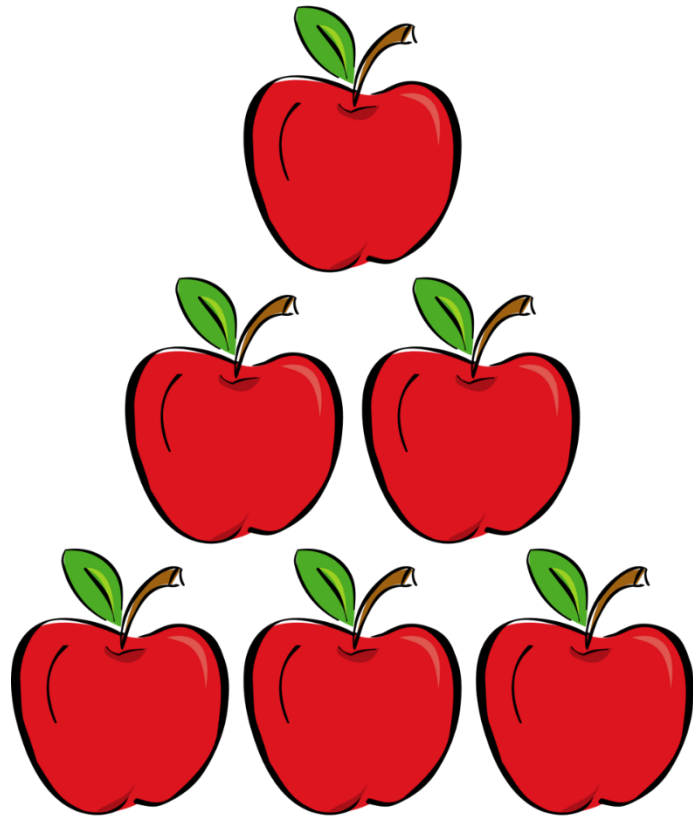
Très tôt, l'enfant sait que ces collections ont la même quantité par perception globale instantanée.



Bien plus tard, il y associe une désignation orale : « trois »

Difficulté 3

Procédures de dénombrement



Combien de pommes ?

QUANTITE → CODE

Opération qui permet d'exprimer par un nombre le cardinal d'une collection

DENOMBREMENT

Le **subitizing** – reconnaissance immédiate de quantités

Le **comptage** – procédures qui s'appuient sur la suite orale des nombres

Le **calcul**

Difficulté 3

5 principes de Gelman & Gallistel (1983)

- Le principe d'**adéquation unique** : chaque mot énoncé doit être mis en correspondance unique avec un objet de la collection à dénombrer.
- La principe de **suite stable** : c'est avoir acquis une récitation stable et conventionnelle de la chaîne orale : la suite des mots-nombres.
- Le principe **cardinal** : c'est associer le dernier mot-nombre prononcé à la quantité.
- Le principe d'**abstraction** : on peut compter des objets qui n'ont pas de liens particuliers entre eux.
- Le principe d'**ordre quelconque** : c'est affirmer que le mot-nombre prononcé ne dépend pas de l'ordre de pointage.

Pour résumer

Des compétences à développer

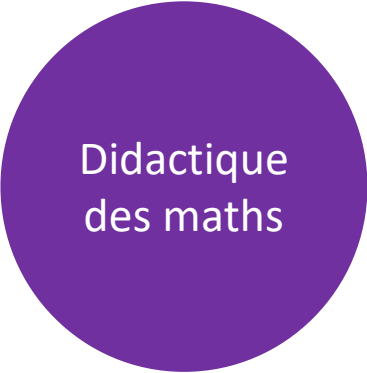
- Reconnaissance immédiate de petites quantités
- Composition sur des petites quantités : « deux et un, c'est trois », « deux et deux, c'est quatre », etc.
- Reconnaissance de collections-types : constellations, doigts, etc.
- Comptage un par un en utilisant la suite des mots nombres

Sources de difficultés

- Suite orale non stable, non conventionnelle
- Importance de l'ordre, de la disposition spatiale, de la nature des objets
- Non coordination de la correspondance un à un
- Non cardinalisation



Comptage-numérotage

A solid purple circle containing the text "Didactique des maths" in white.

Didactique
des maths

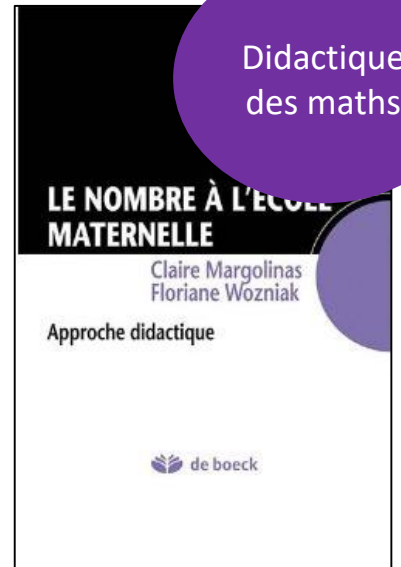
Du côté de la didactique des mathématiques

Recherches en didactique des maths

Didactique
des maths

Liste ordonnée et immuable pour dénombrer et
repérer :

La comptine numérique



Nombre comme mémoire de quantité

- Une collection d'objet
- Une grandeur : la quantité

Processus de dénombrement

- Nombre = mesure une quantité
- Nombre cardinal

Nombre comme mémoire de position

- Une liste
- La position (liée à la grandeur distance)

Processus de repérage

- Nombre = marque d'une position
- Nombre ordinal

Une carte – Tâches fondamentales pour la construction du nombre

(Croset & Gardes, 2019)

	<i>Usage cardinal</i>	<i>Usage ordinal</i>	<i>Décontextualisé</i>
Coder Décoder	Quantité → Code Code → Quantité	Position → Code Code → Position	
Associer	Quantité → Quantité	Position → Position	Code → Code
Comparer Ordonner	Quantités	Positions	Codes
Anticiper	Une quantité après une action	Une position après une action	Calculer avec des codes

Une carte – Tâches fondamentales pour la construction du nombre

(Croset & Gardes, 2019)

**Coder
Décoder**

Associer

**Comparer
Ordonner**

Anticiper

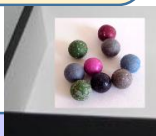
Usage cardinal

Combien de jetons?
Donne moi 4 jetons



Va chercher autant de
garages que de voitures

Dans quelle collection y a-
t-il le plus de jetons ?



Combien de jetons dans la
boite?

Usage ordinal

Quelle position occupe la
perle bleue?
Montre moi le 7^e perle.

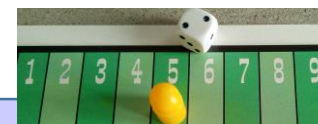


Place un lapin dans le
même wagon que sur le
train « modèle »

Qui est le plus proche de
l'arrivée ?



Quelle sera la position du
pion?



Décontextualisé

Comment s'écrit le
nombre /trwa?

Quel est le nombre le plus
grand?

7 3

Combien vaut $7 + 5$?

Une carte – Tâches fondamentales pour la construction du nombre

(Croset & Gardes, 2019)

**Coder
Décoder**

Associer

**Comparer
Ordonner**

Anticiper

Usage cardinal

Quantité → Code
Code → Quantité

Quantité → Quantité

Quantités

Une quantité après
une action

Usage ordinal

Position → Code
Code → Position

Position → Position

Positions

Une position après
une action

Décontextualisé

Code → Code

Codes

Calculer avec des codes

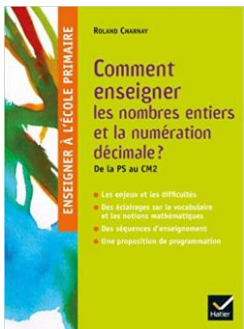
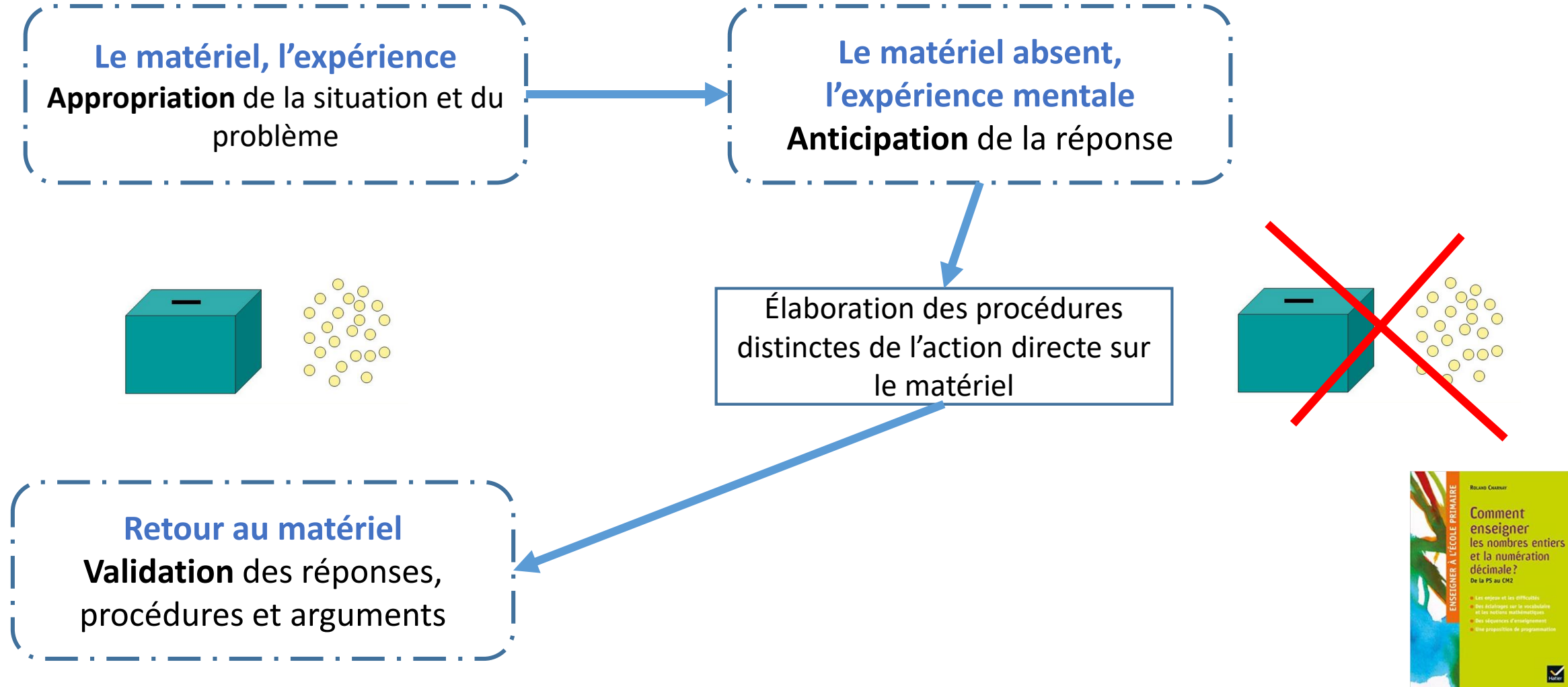
Situation – La boîte



Consigne

Je mets 4 jetons dans la boîte et encore 3 jetons. A vous de trouver combien il y a de jetons dans la boîte. Lorsque vous aurez répondu, nous vérifierons vos réponses en ouvrant la boîte.

Dépasser la « simple » manipulation d'objets



Situation – La boîte



Quels sont les savoirs mathématiques en jeu ?

Quel type de tâches pour la construction du nombre ?



Situation – La boîte

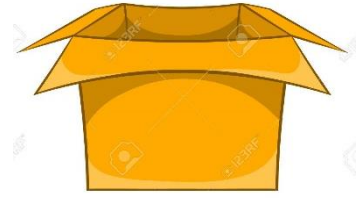
Quelles conditions matérielles sont nécessaires pour mettre en place cette situation ?

Une boîte et des jetons.

La manipulation est réalisée par l'enseignant.e, les élèves ne doivent pas voir le contenu de la boîte pour provoquer l'anticipation et donc l'utilisation de procédures de comptage puis de calcul.

Dans la phase de vérification, la manipulation est effectuée par l'élève.

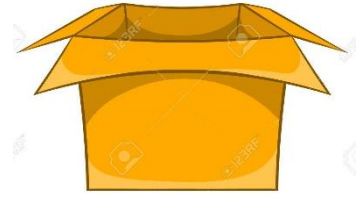
Plus tard, la manipulation pourra être faite par les élèves, en autonomie, en binôme.



Situation – La boîte

Quelles procédures possiblement mises en œuvre par les élèves ?

- des procédures relevant du **comptage**
 - utiliser du matériel et simuler l'action (il prend 4 cubes puis 3 cubes, les réunit et dénombre) ;
 - dessiner les jetons (ou barres, constellations du dé, etc.) et les dénombrer ;
 - compter sur les doigts : faire 1...4 sur une main puis 1..3 sur l'autre et recompter les doigts levés ;
 - surcompter avec les doigts : mettre 4 dans sa tête et faire 5,6,7 sur une main ;
 - surcompter à l'aide de la bande numérique : l'élève met un doigt sur 4 et compte 1,2,3 en déplaçant son doigt sur la bande pour lire 7 ;
- des procédures relevant du **calcul**
 - se dire qu'ajouter trois jetons à quatre jetons, c'est ajouter d'abord un jeton (ce qui fait cinq), et encore un (ce qui fait six) et encore un, ce qui fait sept ;
 - utiliser un résultat mémorisé : je sais que "quatre et trois, c'est égal à sept".

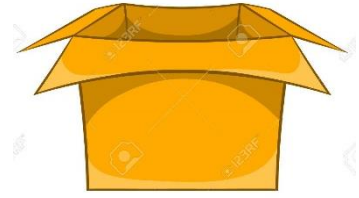


Situation – La boîte

Quelles variables didactiques ?

Passage progressif de procédures de comptage aux procédures de calcul

- Présence de matériel physique (oui, non, partielle)
Cubes, jetons, bande numérique, doigts, feuilles, ardoises, etc.
- Nature des nombres en jeu (inférieur à 10, entre 10 et 100, supérieur à 100)
- Taille relative des nombres en jeu (inférieur à 3, à 5, à 10, entre 10 et 100)
Quantité de départ, quantité ajoutée, quantité totale
- Présence de la boîte pour la validation (oui, non)



Situation – La boîte

Quelles difficultés possibles ?

- Comprendre la situation et s'en faire une représentation
 - Faire l'action devant l'élève, avec la manipulation possible dans toutes les étapes (pas d'anticipation), proposer la situation régulièrement
- Se détacher du matériel physique
 - Proposer la situation en faisant évoluer petit à petit la présence et le type de matériel (cubes → dés → feuilles → doigts)
- Se détacher de l'utilisation des doigts
 - Développer en parallèle les faits numériques (i.e. maison du 5), montrer que cette procédure sera plus rapide



Situation – La boîte

Comment s'assurer des acquis des élèves ?

- Evaluation formative, via le suivi des élèves dans leur réussite sur les différentes formes de la situation proposée
- Leur demander d'expliquer leur procédure
- Leur demander de jouer à 2 dont l'un joue le rôle de l'enseignant
- Leur proposer le même problème dans un contexte différent (par exemple greli-grelo)
- Leur proposer le même problème, simplement en évoquant la situation (sans la boîte)
- Evolution : Leur proposer la même situation avec un problème de champ additif différent

Situation – La boîte

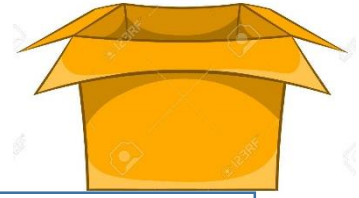


Evolution de la situation

La situation peut évoluer en proposant d'autres actions et donc d'autres problèmes du champ additif :

- la **recherche du complément** : il y a 5 jetons dans la boîte, je mets des jetons. Il y a 8 jetons dans la boîte. Combien de jetons a-t-on ajoutés ?
- la **recherche de l'état initial** dans une situation de retrait de jetons : Il y a 7 jetons dans la boîte, j'en prends 2. Combien y-a-t-il de jetons dans la boîte ?

Situation – La boîte



Manipuler passivement

Utiliser le matériel à disposition sans faire de lien avec la situation proposée

Manipuler activement
EXPERIMENTER

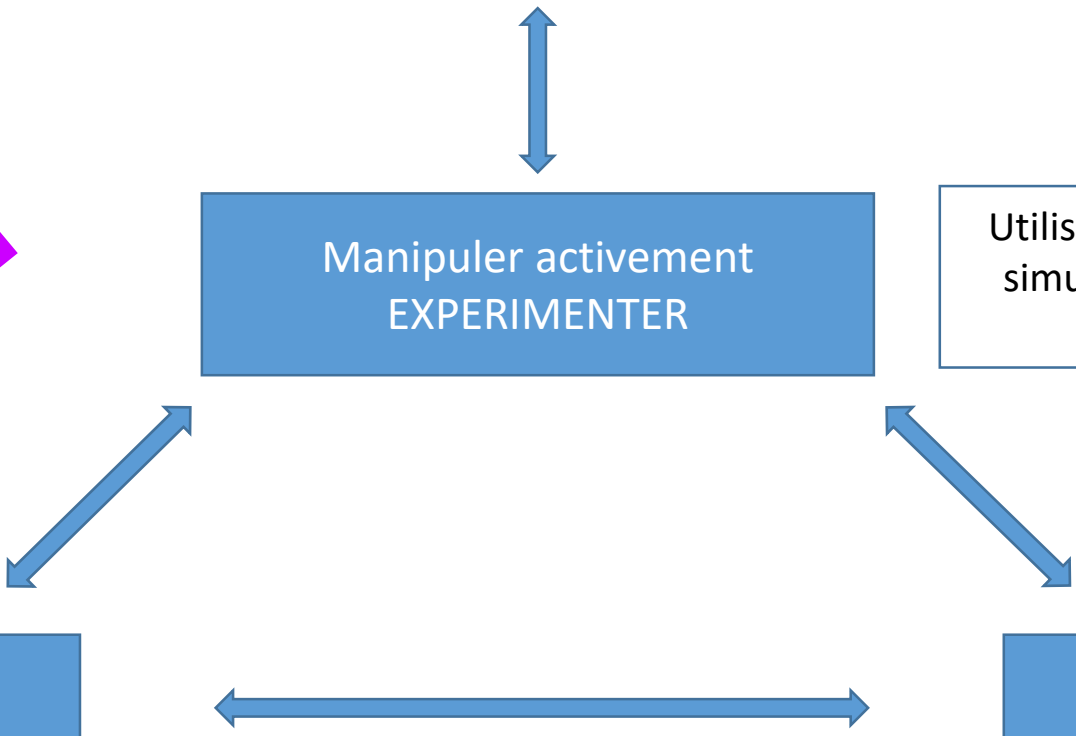
Utiliser le matériel à disposition pour simuler ou représenter la situation.
Faire des essais.

Valider, Contrôler

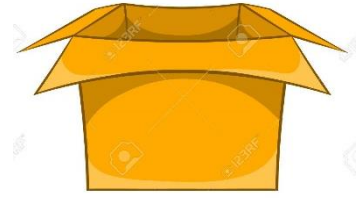
Dénombrement des jetons
Cartes à points, dés, bande numérique, etc.

Formuler des hypothèses

Il y a 7 jetons car j'ai mis 4 dans ma tête et après j'ai compté avec mes doigts 5, 6, 7



Situation – La boîte



INSTITUTIONNALISATION

« quand je mets quatre jetons et encore trois jetons dans la boîte, il y a au total sept jetons dans la boîte »

4 plus 3 est égal à 7

Manipuler passivement

Manipuler activement
EXPERIMENTER

Suivi des élèves
Différenciation

Variables

- Matériel secondaire (présent ou non)
- Nature de ce matériel
- Taille des nombres
- Boîte (présente ou non)

Etayage

Valider, Contrôler

- Comment peux-tu savoir combien de jetons il y a dans la boîte maintenant ?
- Est-ce que tu pourrais faire un dessin ? Est-ce que tu pourrais utiliser la bande numérique ?
- Comment sais-tu qu'il y en a 7 ?
- Comment peux-tu en être sûr ?
- Veux-tu vérifier ? Comment peut-on vérifier ?

Formuler des hypothèses

A vous de jouer !

- **Atelier 1** - Situation Garages-voitures
- **Atelier 2** – Situation Train des lapins
- **Atelier 3** – Situation Tapis de tri
- **Atelier 4** – Situation Saladier
- **Atelier 5** – Situation Math-œufs